数理解析研究所講究録
473巻 1982年 126-134

On Quasi-Buchsbaum Rings and Modules

静岡薬科大学　鈴木直義 (Naoyoshi Suzuki)

講演では、後藤四郎，山岸規久道両氏との共著で準備中の論文[9]の一部分の紹介をしました。そのうち，quasi-Buchsbaum環の存在定理については，第4回可換環論シンポジウムへの報告集に，後藤氏により詳細が述べられるはずですので，本稿では，講演の前半に相当する，基本定理を中心に述べます。

§0. 序.　Buchsbaum環の研究は，D. A. Buchsbaumによる次の予想に源があります：局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ の system of parameters (s.o.p.) $\underline{a} = \{a_1, \cdots, a_d\}$ に対して，$l_A(A/(\underline{a})) - e_0(\underline{a}; A)$ は，たとえば，$\dim A - \operatorname{depth} A$ といった環 A の numerical な不変量に一致する，[1].

W. Vogelはこの問題に注目し，Buchsbaum環の理論へと発展させました，[17].
Vogel達の東独での基礎理論の一応の完成にひきつづき，Y. Shimoda及び S. Gotoにより，Rees環との関連で独自の理論が，ここ数年で急速に展開され、Buchsbaum環の理論が一層豊になって来ました。

さて，次元以外の local cohomology が vector space over $A/\mathfrak{m}$ であるような局所環を quasi-Buchsbaum 環と呼びます，[5]。 その名のとうり，Buchsbaum 環はたしかに，quasi-Buchsbaum 環です。 1978年10月の軽井沢での第1回可換環論シンポジウム当時は，両者の差を明確に認識出来るほどには，十分に Buchsbaum 環がわかっていませんでした。 我々が知っていた唯一の例は，2次元のもので，Stückrad によって与えられたものでした，(1.5)。 以後の Buchsbaum 環についての研究の進歩は，quasi-Buchsbaum 環について，さまざまな方法と知識を提供して来ました。 同時に，quasi-Buchsbaum 環の研究は，さらに，次元以外の local cohomology が有限生成であるような局所環の理論への重要な足がかりとなっています。

§1. Buchsbaum環について． quasi-Buchsbaum 環の概念は，そもそも Buchsbaum 環を正確に認識するために導入されたものですから，まず Buchsbaum 環について述べることにします。 以下 $(A, \mathfrak{m}, k)$ は Noetherian 局所環とします。

(1.1) Definition & Theorem，([11, 14, 15, 19])． 有限生成 A-加群 M について，以下の条件は同値である：

(i) 加群 M の numerical な不変量 $I(M)$ で，任意の s.o.p. for M, $\underline{a}$ に対して

$$l_A(M/(\underline{a})M) - e_0(\underline{a}\,;M) = I(M)$$

が成立するものがある。

(ii) 任意の s.o.p. $\underline{a} = \{a_1, \cdots, a_d\}$ for M は weak M-sequence をなす。つまり，$i = 1, \cdots, d$ に対して，

$$(a_1, \cdots, a_{i-1})M \underset{M}{:} a_i \subset (a_1, \cdots, a_{i-1})M \underset{M}{:} \mathfrak{m}$$

が成立する。

(iii) 任意のMのs.o.p. $\underline{a}$ に対して,

$$\mathfrak{m}H_1(\underline{a}; M) = 0 \qquad (\text{resp.}, \mathfrak{m}H_p(\underline{a}; M) = 0, \ \forall p \geq 1).$$

(iii′) 任意のMのs.o.p. $\underline{a}$ に対して, truncated complex $\tau^d K^\cdot(\underline{a}; M)$ は, ある $A/\mathfrak{m}$-vector space からなる complex に quasi-isomorphic である。ここで,2つの complex が quasi-isomorphic であるとは,homology が同型であることで, complex $X^\cdot$ に対して,その truncated $\tau^n X^\cdot$ とは,

$$\to X^p \to X^{p+1} \to \cdots \to X^{n-1} \to B^n(X^\cdot) \to 0,$$

又,$\tau_m X^\cdot$ とは,

$$0 \to B^{m+1}(X^\cdot) \to X^{m+1} \to X^{m+2} \to \cdots.$$

(iv) 任意の $p < \dim M$ に対して, direct system の limit map

$$H^p(\mathfrak{m}; M) \longrightarrow H^p_{\mathfrak{m}}(M)$$

は surjective である。

(v) $\tau^d R\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ が k-vector spaces からなるある complex に quasi-isomorphic である。

さらに,Dualizing complex of A, $D^\cdot$ が存在するならば,

(v′) $\tau_{-d} \operatorname{Hom}(M, D^\cdot)$ が,ある k-vectorpaces からなる complex に quasi-isomorphic である。

これらの同値な条件を満す加群MをBuchsbaum加群と呼ぶ。局所環Aは,A上のBuchsbaum加群であるとき,Buchsbaum環と呼ばれる。

次は、上の定理より直ちに得る。

(1.2) Corollary. M が Buchsbaum 加群ならば、任意の $i<\dim M$ に対して、$\mathfrak{m}H^i_{\mathfrak{m}}(M)=0$ が成立する。

(1.3) Remarks. (i) M が Buchsbaum 加群のとき、(1.1) の (i) の $I(M)=\sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i}h^i(M)$、ここで、$h^i(M)=\ell_A(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. 従って、特に、$M$ が C-M. $\Leftrightarrow$ M が Buchsbaum で $I(M)=0$.

(ii) $i\neq d, t$ に対して $H^i_{\mathfrak{m}}(M)=0$ のとき、M が Buchsbaum $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{m}H^t_{\mathfrak{m}}(M)=0$.

さて、(1.2), (1.3) から、Buchsbaum 加群 M の重要な性質として、

$$(\#)\quad \mathfrak{m}H^i_{\mathfrak{m}}(M)=0 \qquad \text{for } \forall i\neq \dim M$$

に着目するとき、'Cohen-Macaulay' という性質が local cohomology で完全に記述することが出来るわけですから、条件 (#) は、加群が Buchsbaum であることのうちどのぐらいの意味をもっているかという疑問は、自然なものです。

(1.4) Definition. 有限生成加群 M が 'quasi-Buchsbaum 加群' であるとは、上記 (#) の条件が成立することとする。 ring A は、A-加群として、quasi-Buchsbaum であるとき、'quasi-Buchsbaum 環' と呼ぶ。

quasi-Buchsbaum 環は必ずしも Buchsbaum 環ではない。実際、

(1.5) Example. ([Stuckrad]). $R:=k[[X_1, X_2, Y_1, Y_2]]\supset \mathfrak{a}:=$

$(X_1, X_2) \cap (Y_1, Y_2) \cap (X_1^2, X_1, Y_1^2, Y_1)$. $A := R/\mathfrak{a}$ とすると, $\dim A = 2$ で, Aは quasi-Buchsbaum. しかし, Aは Buchsbaumではない: $\{x_1+y_1, x_2+y_2\}$ は(Aの s.o.p. で) weak A-sequence ではない。

ここで注目すべきことは, $\forall m, n \geq 1$ に対して, $\{(x_2+y_2)^m, (x_1+y_1)^n\}$ は weak A-sequence をなしていることである。つまり, 'weak-sequence' という性質は, その要素の順序に依存するのである。

さらに A は quasi-Buchsbaum で, $a = x_1+y_1$, $b = x_2+y_2$ は s.o.p. であるが, もし A/a も quasi-Buchsbaum環であると, (1.3)(ii) より, A/a は Buchsbaum環である。 a は weakly A-regular (i.e., $\mathfrak{m}(0 :_A a) = 0$). 従って, $\{a, b\}$ が weak A-sequence となってしまう. 従って, A/a は quasi-Buchsbaum環ではない。

(1.6) Question. Mが quasi-Buchsbaum加群のとき, Mのいかなる parameter a に対して M/aM も又 quasi-Buchsbaum加群となるか?

これが, 次節の主定理の motivation です。

§2. Quasi-Buchsbaum環の特徴付け.

(2.1) Theorem. ([Suzuki](1978) also [16]). $a \in \mathfrak{m}^2$ が M の parameter (i.e., $\dim M/aM < \dim M$) のとき, M が quasi-Buchsbaum加群ならば, M/aM も又 quasi-Buchsbaum加群である。もし, $\ell_A(0 :_M a) < \infty$ ならば逆も正しい。

この定理は，quasi-Buchsbaumの特徴付けを与える，次の定理の基本的な部分を与える．

(2.2) Theorem ([Stückrad=Vogel=Schenzel], [Suzuki]). 有限生成A-加群Mについて，次は同値である．

(i) Mはquasi-Buchsbaum加群である；

(ii) $\mathfrak{m}^2$に含まれるs.o.p. for Mでweak M-sequenceをなすものがある；

(iii) $\mathfrak{m}^2$に含まれるs.o.p. for Mはweak M-sequenceをなす；

(iv) $\mathfrak{m}^2$に含まれる(sub-) s.o.p. for M $\underline{a}$に対して，

$$\mathfrak{m}H_1(\underline{a};M)=0 \qquad (\text{resp. } \mathfrak{m}H_p(\underline{a};M)=0 \text{ for } \forall p\geq 1);$$

(v) $\mathfrak{m}^2$に含まれるs.o.p. for Mで

$$\mathfrak{m}H_1(\underline{a};M)=0$$

となるものがある．

Buchsbaum加群の不変量 I(M)については，

(2.3) Remarks. (i) 加群Mの次元以外のlocal cohomologyが有限長のとき，任意のs.o.p. for M $\underline{a}$に対して

$$\ell_A(M/\underline{a}M)-e_0(\underline{a};M)\leq \sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i}h^i(M) \ (=:I(M))$$

が成立する．

(ii) Mがquasi-Buchsbaumのときは，$\mathfrak{m}^2\supset\underline{a}$なるs.o.p. for M $\underline{a}$に対して(i)で等号が成立する．しかし，この逆は正しくない。

Example. ([Yamagishi]). $(B, \mathfrak{n})$を1次元Buchsbaum環でdepth 0のものとする。$A := B \ltimes B \supset \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \times B$ とする。すると，$\mathfrak{m}^2 H^0_\mathfrak{m}(A) = 0$．しかし，$\mathfrak{m} H^0_\mathfrak{m}(A) \neq 0$ だから，Aはquasi-Buchsbaumではない。一方で，$a \in \mathfrak{m}^2$ がAのparameterならば $a H^0_\mathfrak{m}(A) = 0$ で，$\ell_A(A/aA) - e_0(a; A) = I(A)$.

Buchsbaum環の研究の過程で派生したさまざまな問題をquasi-Buchsbaum環についても検証されて，それにより，逆に，Buchsbaum環がいかにデリケートな性質をもつかがわかって来ました。この§の最後に，quasi-Buchsbaum加群を一つの対象と認識する根拠となった定理を述べる。

Definition. 有限生成A-加群Mに対して，'Mのtype' $r_A(M)$ を

$$r_A(M) := \sup \{\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathrm{Soc}(M/\mathfrak{q}M);\ \mathfrak{q} \text{ は } M \text{ の parameter ideal}\}$$

と定義する。

(2.4) Theorem. ([8]). Mがd-次元のquasi-Buchsbaum加群のとき，

$$r_A(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(M) + \nu_A(K_M).$$

ここで，$\nu_A(\ )$ は最小生成系の個数，K_M はMのcanonical module，$\widehat{K_M} \cong \mathrm{Hom}_A(H^d_\mathfrak{m}(M), E_A(k))$.

§3. Existance Theorem for quasi-Buchsbaum domains.

Theorem ([Goto, 9]). 整数 $d \geqq 3$, $h_1, \ldots, h_{d-1} \geqq 0$, $h_i, h_j > 0$

(for some $i<j$) に対して 次の条件を満足する quasi-Buchsbaum local domain A が存在する:

(a) $\dim A = d$; (b) $h^i(A) = h_i$ for $i=1,\cdots,d-1$;

(c) A は Buchsbaum 環ではない.

もし $h_1=0$ のときは, A を normal にとれる.

この定理についての詳細は, 第4回可換環論シンポジウムの報告集に, 後藤氏自身による解説が述べられる予定ですので, そちらへゆずります。

REFERENCES

|1| D.A. Buchsbaum, Complexes in local ring theory, in Some Aspects of ring theory, C.I.M.E. Rome(1965).

|2| E.G.Evans,Jr. and P.A.Griffith, Local cohomology modules for normal domains, J.London Math.Soc. 19(1976)277-279.

|3| S.Goto, On Buchsbaum rings, J. of Alg. 67(1980)272-279.

|4| S.Goto, On Buchsbaum local rings, RIMS Kôkyuroku 374(1980), Reprt of RIMS symposium on Commutative rings, Oct.31-Nov.2.(1979), in Japanese.

|5| N. Suzuki, On the applications of generalized local cohomology, Report of the 1st symposium of commutative algebra, 1978, Karuizawa.

|6| S.Goto, On the associated rings of parameter ideal in Buchsbaum rings, Preprint(1982).

|7| S.Goto, The associated graded rings of Buchsbaum local rings, preprint(1982).

|8| S.Goto and N. Suzuki, Index of reducibility of parameter ideals in a local ring, preprint (1982).

|9| S.Goto, N.Suzuki and K.Yamagishi, On quasi-Buchsbaum rings and Modules, in preparation.

|10| B. Renschuch, J. Stückrad and W. Vogel, Weitere Bemerkungen zu einem Problem der Schnittheorie und über ein Maß von A.Seidenberg für die Inperfectheit, J. of Alg., 37(1975),447-471.

|11| P.Schenzel, Applications of dualizing complexes to Buchsbaum rings, to appear in Advances in Mathematics.

|12| P.Schenzel, Ngo Viet Trung, Nguyen Tu Cuong, Ver allgemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln, Math. Nachr. 85(1978) 57-73.

|13| J. Stückrad, Über die kohomologische Characterisierung von Buchsbaum-Moduln, Math. Nachr. 95(1980) 265-272.

|14| J. Stückrad and W. Vogel, Ein Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay-Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, J. of Math. Kyoto Univ.13(1973)513-528.

|15| ______, Toward a theory of Buchsbaum singularity, Ammer. J. of Math. 100(1978)727-746.

|17| W.Vogel, Uber eine Vermutung von D.A.Buchsbaum, J. of Alg. 25(1973)106-112.

|18| ____, A non-zero-divisor characterization of Buchsbaum modules, Michigan Math. J. 28(1981)147-152.

|19| N. Suzuki, On the Kosuzul Complex generated by a system of parameters for a Buchsbaum Modules, Bulletin of Dept. of Gen. Education of Shizuoka College of Pharmacy, 8(1979).

Naoyoshi Suzuki
Dept. of General Education
Sizuoka College of Pharmacy
2-2-1, Oshika, Shizuoka
422 Japan